Artículos

Caos y fractales

Chaos and Fractals

Miguel Ángel Martín

Resumen

El concepto de caos, o comportamiento errático de sistemas deterministas, ha sido uno de los temas de investigación matemática que mayor impacto ha causado en la ciencia en el último cuarto de siglo. Por otro lado, los fractales son estructuras geométricas que presentan irregularidades en todas las escalas de observación. La llamada Geometría Fractal es la más adecuada para estudiar las formas de la naturaleza así como para entender la dinámica caótica, de la que los fractales aparecen como un subproducto natural. En ambos conceptos, caos y fractales, se apoyan las modernas y un tanto especulativas teorías de la complejidad. Este artículo pretende servir de breve introducción a estas nociones, y abrir una ventana panorámica a las implicaciones que los mismos tienen en el desarrollo de la ciencia actual.

Palabras clave

Caos. Fractales. Dimensión fractal. Autosemejanza. Complejidad. Ruidos fractales.

Abstract

The concept of chaos, or erratic behaviour of deterministic systems, has been one of the subjects of interest of mathematical research that have caused greatest impact in science during the last quarter of century. On the other hand, fractals are geometric structures presenting irregularities at every scale. Thus, Fractal Geometry seems to be the adequate geometry to study shapes in nature as well as to understand chaotic dynamics, from which fractals appear as a natural by product. Both, chaos and fractals, are then basic concepts supporting the modern, and somewhat speculative, theories of complexity. This paper aims to make an introduction to the main ideas related with those concepts and an insight to the implications that they have in the development of science nowadays.

Key words

Chaos. Fractals. Fractal dimension. Selfsimilarity. Complexity. Fractal noises.

El autor es Profesor del Departamento de Matemáticas de la Escuela Superior de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid.

Introducción

Lejos de lo que a veces se cree, la actividad investigadora en Matemáticas es frenética y abundante la producción que de ella se deriva, estando gran parte de dicha producción ligada a la investigación científica en áreas como la física, medicina, biotecnología, etcétera. De tal forma, muchos de los espectaculares logros en estos campos no podrían concebirse sin la ayuda de esa investigación. Sin embargo, resulta muy raro que en los medios de comunicación aparezcan alusiones a los avances experimentados por "la reina de las ciencias" (como llamaba Gauss a las Matemáticas), aunque en muchos casos resulten insignificantes frente al brillo, ciertamente justificado, con el que aparecen reflejados otros avances científicos.

Durante los últimos años las teorías del Caos y de Fractales parecen ser, sin embargo, un caso singular que ha escapado a esa tendencia, habiendo experimentado una popularización inusitada. Este fenómeno ha estado alimentado, por una parte, por la sensación sugerente de la palabra caos y la fascinación natural que produce el pensar que hasta las situaciones más confusas se pueden llegar a entender y, por otra, por la vistosidad de las imágenes fractales que, de manera vaga se asocian a lo anterior. Ciertamente, como veremos, ambas parcelas matemáticas tienen elementos espectaculares y con gran trascendencia para la ciencia en general.

Un nuevo paradigma

Si dejamos caer un objeto desde una cierta altura podemos predecir el tiempo que va a tardar en llegar al suelo. Poco importa que nos hayamos equivocado unos centímetros en la medida de la altura de la torre desde la que lo hemos dejado caer: el resultado de nuestra predicción se va a ver escasamente afectado. Esta práctica tan común, los actuales viajes espaciales y los innumerables logros de la ciencia descansan todos en el mismo **paradigma determinista**, que hunde sus raíces en los *Principia* de Newton: El discernimiento de la ley que rige las variables de un sistema, junto con el conocimiento del estado inicial (o valor de partida de las variables), permite predecir la evolución del mismo. La experimentación científica se asienta en esta concepción. Así, las teorías se confirman cuando al repetir una y otra vez los experimentos en las mismas, o en condiciones aproximadas, el resultado sigue siendo esencialmente el mismo.

El otro gran paradigma de la ciencia de los últimos siglos ha sido el **comportamiento aleatorio.** Si las ecuaciones diferenciales se han erigido en la herramienta básica para modelar situaciones deterministas, el análisis estadístico ocupa ese mismo lugar dentro de los sistemas aleatorios, que por ser dependientes de infinitas variables o grados de libertad deben ser estudiados mediante el análisis estadístico que analiza el comportamiento promedio. Los dos paradigmas representan filosofías distintas, cada uno con sus herramientas y metodología.

El descubrimiento en los años setenta y primeros ochenta del siglo XX que sistemas simples y deterministas pueden dar lugar a comportamientos erráticos o aparentemente aleatorios, removió los cimientos de la ciencia dando paso al nacimiento de un nuevo paradigma: **el comportamiento caótico**.

De forma casi paralela –aunque independiente– nace la Geometría Fractal, que está íntimamente conectada con ese nuevo paradigma y se convertirá en una herramienta esencial para entender, describir y cuantificar la dinámica caótica.

El propósito de este artículo es mostrar –a través de ejemplos sencillos– las ideas esenciales sobre las Teorías del caos y de fractales.

Sistemas deterministas con comportamiento errático

Consideremos (sin asustarse los no familiarizados con las fórmulas) la ley $X_{k+1} = cx_k\,(a\text{-}x_k)$, llamada ecuación logística, que podría representar, por ejemplo, la evolución de una determinada población (bacterias, insectos, enfermos, etcétera) en función del tiempo (k). Este modelo expresa la hipótesis natural de que la población en el periodo $k+1$ se ve afectada, por una parte, por la población X_k que existe en el periodo anterior y, por otra, por lo que la queda hasta alcanzar el nivel a de saturación. De ahí que dicha población X_{k+1} se exprese proporcionalmente al producto de ambos factores $X_k\,(a\text{-}x_k)$, el primero como "estimulante" del crecimiento (una mayor población actual permite un mayor crecimiento), y el segundo, como "amortiguador" del mismo (estar cerca de los niveles de saturación frena el crecimiento). Prescindiendo de detalles "técnicos", lo que realmente importa señalar es que se trata de una modelización natural mediante una ley extraordinariamente simple. Imaginando que en una situación concreta la ley reflejara a la perfección el crecimiento de una población (siendo conocidas las constantes *c y a)* cabría esperar que pudiéramos predecir cuál sería la población X_k en cualquier periodo futuro *k*. Esa simulación puede incluso hacerse con una calculadora de bolsillo programable. Veamos los resultados. La figura 1 muestra la evolución partiendo de una población inicial de X_0 millones de individuos $(X_0 < 1)$ y habiendo tomado por ejemplo $c=4$ *y* $a=1$, que podríamos suponer corresponde a la evolución de una población que como máximo admite un millón de individuos (de nuevo estos detalles son indiferentes para nuestra argumentación).

Si nuestra estimación de la población actual hubiera sido $X_0 = X_0 + 0.0001$ (por ejemplo, haciendo una sobreestimación de 100 individuos en la población real actual) la simulación sería la que muestra la figura 2.

Para apreciar las diferencias, mostramos en la figura 3 la diferencia entre las poblaciones estimadas en uno y otro caso.

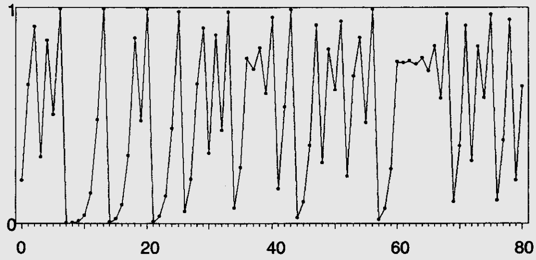

Figura 1.

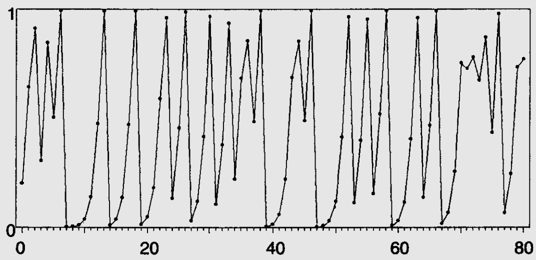

Figura 2.

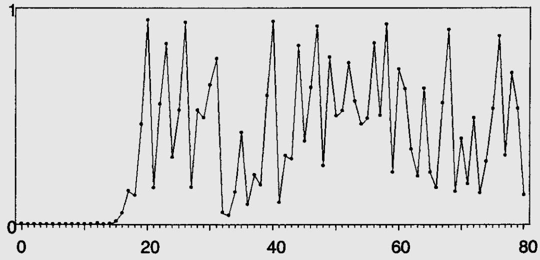

Figura 3.

El resultado es sorprendente. Como cabría esperar, al principio ambas estimaciones son próximas, pero después las diferencias se hacen grandes, y lo que aún es más sorprendente, parecen tener un comportamiento errático: una situación **simple y determinista** aparece como errática o aleatoria. Además, aun suponiendo la perfecta adecuación de la ley, la predicción se vuelve imposible, ya que cualquier pequeño error en la estimación del *presente* X_0, ¡toda medida física lleva consigo un error!, tiene consecuencias fatales para el conocimiento del futuro X_k. Estamos ante una dinámica **caótica** cuya característica más notable es la **sensibilidad a las condiciones iniciales**, también denominada *efecto mariposa* (las pequeñas fluctuaciones en el aire producidas por una mariposa en el Amazonas podrían provocar un tornado semanas más tarde). Es fácil entender por qué el descubrimiento de estos importantes hechos ha tenido lugar justo en la era de los computadores, que son una herramienta fundamental para la exploración experimental y la simulación de los sistemas dinámicos, sacando a la luz fenómenos que tienen lugar cuando el número de iteraciones (léase tiempo transcurrido) es relativamente grande.

Si tenemos en cuenta que la mayoría de las leyes de la naturaleza son no lineales y potencialmente caóticas, las consecuencias en la ciencia de lo que acabamos de describir son importantes tanto a la hora de interpretar situaciones aparentemente aleatorias, como en la metodología seguida para entenderlas y en los métodos utilizados para la predicción.

Situaciones aleatorias con resultado determinista: el juego del caos

Consideremos ahora otro ejemplo de la ley de evolución o sistema dinámico, el denominado *juego del caos*. Supongamos que marcamos tres puntos 1, 2, 3 en el plano y partiendo de un punto Z_0 cualquiera nos dirigimos en línea recta hacia uno de dichos puntos quedándonos a mitad de camino entre el punto seleccionado y el punto de partida Z_0 (figura 4).

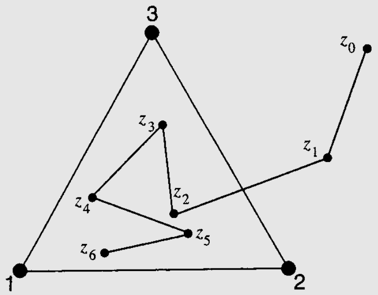

Figura 4.

El punto al que hemos de dirigirnos lo seleccionamos de forma aleatoria tirando un dado y con las siguientes reglas: si sale 1 o 2 nos dirigimos al punto 1, si sale 3 o 4 nos dirigimos al punto 2 y si sale 5 o 6 vamos hacia el punto 3. Si llamamos Z_1 al punto en el que nos hemos quedado, después de haber tirado el dado y obrado con la norma antes apuntada, y repetimos exactamente el mismo proceso una y otra vez obteniendo los puntos o estados Z_2, Z... Z_n..., ¿Podría predecirse hacia qué punto o región se dirigen los "futuros" Z_n? ¿Vagarán al azar, o existe algún tipo de certidumbre? ¿Dependerán del estado inicial? Puesto que nuevamente se trata de un problema ingenuo que todos podemos entender, sería aconsejable detenernos aquí y reflexionar sobre esas preguntas. Incluso, después del ejercicio mental propuesto, las personas que conozcan un mínimo de programación pueden mandar a su ordenador que simule lo que ocurriría. La figura 5 muestra el resultado de dos simulaciones, ambas con 20 iteraciones, como puede verse los resultados son distintos.

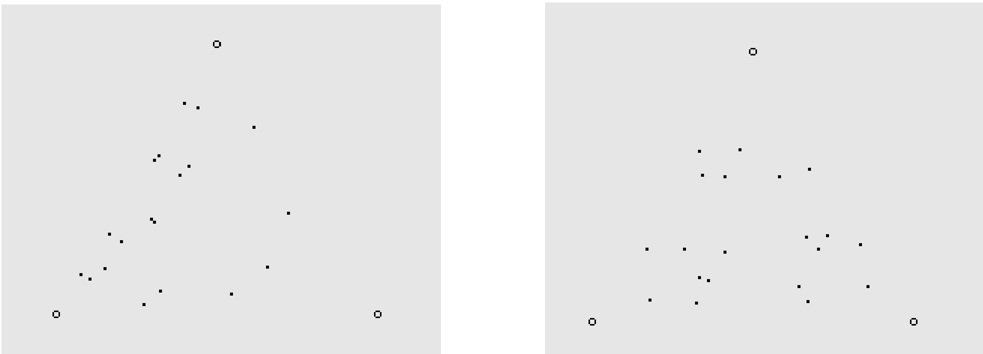

Figura 5.

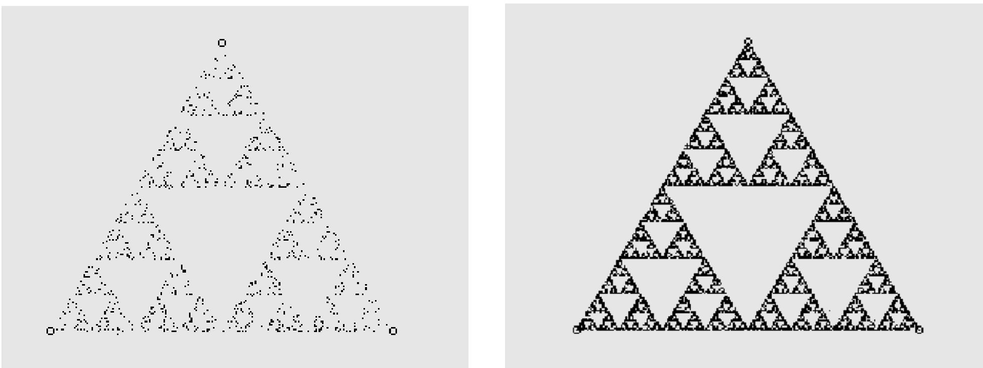

Figura 6.

La figura 6 muestra simulaciones con 1.000 y 10.000 puntos. El resultado es sorprendente: ¡Siempre aparece la misma figura! ¡Independientemente del punto del que se parta o de que los primeros resultados sean diferentes!

La figura que aparece es el llamado **atractor del sistema dinámico**, o región hacia donde se dirigen las órbitas; una figura de geometría peculiar, con irregularidades a todas las escalas. Tal figura es un **fractal** llamado triángulo de Sierpinski. Resulta así sorprendente que una situación con características aleatorias tenga un resultado (a largo plazo) determinista. Contrasta, además, la sencillez del problema con la alta complejidad de su resultado.

Los fractales

El triángulo de Sierpinski (que en realidad no es un triángulo) tiene una definición geométrica independiente de su aparición como atractor del sistema dinámico anterior: es la región que quedaría al final de un proceso infinito consistente en ir prescindiendo en etapas sucesivas del triángulo central (triángulo en blanco) de cada uno de los triángulos que van apareciendo en el proceso iterativo que ilustra la figura 7.

La geometría de este tipo de objetos sigue así una nueva ley de regularidad llamada **autosemejanza**, que es la invarianza de su geometría respecto de la escala a la que son observados, mostrando huecos (regiones sin puntos) e irregularidades a todas las escalas. Y si hiciéramos un "zoom" en uno de los triangulitos más pequeños, lo que veríamos de nuevo es otro triángulo de Sierpinski (figura 8).

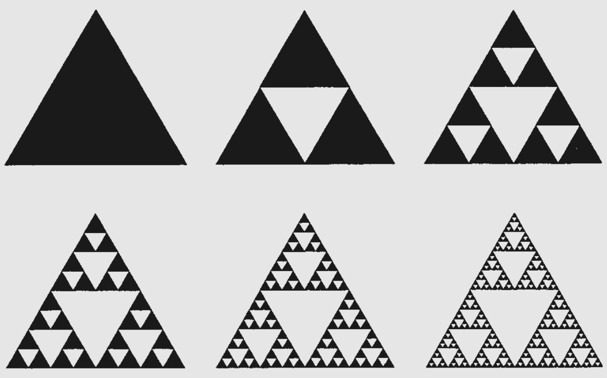

Figura 7.

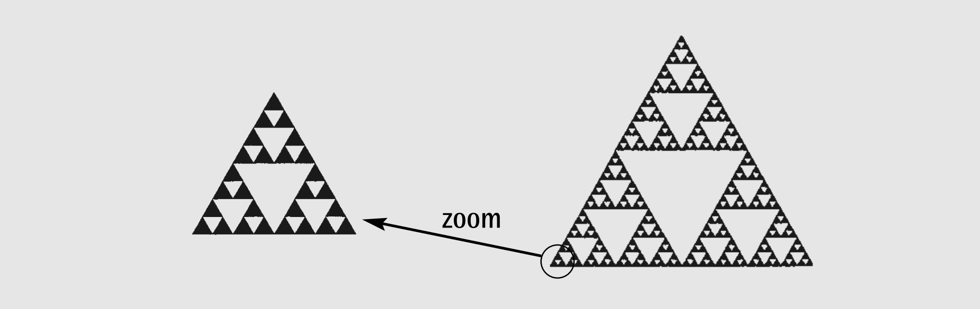

Figura 8.

Figura 9.

La **dimensión fractal** de esa región, que en este caso es 1.58, viene a reflejar su capacidad para rellenar el espacio, indicando que se trata de un objeto geométrico con tamaño intermedio entre una curva y una superficie. A este tipo de objetos que se denominan objetos fractales, muchas veces de aspecto sugerente y llamativo que recuerdan ciertas formas de la naturaleza (figura 9), se llega por procesos iterativos simples.

Caos y fractales

Tal vez, lo más llamativo es que los fractales surgen asociados a procesos dinámicos tan simples como el juego del caos. El objeto fractal no aparece como resultado de un proceso geométrico "ordenado" como el que acabamos de exponer (pues un trozo de órbita en el juego del caos es errática y no manifiesta ninguna regularidad), sino como una estructura *asintótica* o a largo plazo que aparece como resultado de una lucha entre determinismo y aleatoriedad presentes en el juego.

Por todo esto, cabe preguntarse: ¿qué tiene que ver el caos con los fractales? Aunque el resultado final del juego del caos pueda parecer que queda resumido en el triángulo de Sierpinski, el resultado Z_0, Z_1, Z_2... Z_n, (órbita) de una realización concreta y el de otra, incluso obtenida partiendo del mismo estado inicial, puede ser completamente distinto. De hecho, la evolución de la órbita sigue una dinámica caótica con características muy similares al ejemplo determinista del principio. Sin embargo, existe un hecho crucial que caracteriza a los sistemas caóticos: se tiene una certidumbre acerca de la región del plano en torno a la que vagan las órbitas, que es el mencionado triángulo de Sierpinski, en el caso del juego del caos. Así, si los puntos tendieran a ocupar indistintamente todos los puntos del triángulo (macizo), el atractor sería reemplazado por un objeto con área (dimensión 2), y si se dirigieran a un punto concreto, la dimensión resultante sería 0. Serían los resultados de una dinámica completamente aleatoria o determinista simple (lineal), respectivamente.

La dimensión fractal provee información del tipo de incertidumbre inherente al sistema dinámico con la cuantificación de la medida del atractor, o región hacia donde vagan los futuros. En general, los sistemas dinámicos caóticos muestran unas características intermedias entre la certidumbre de los sistemas deterministas clásicos (caída de un grave, por ejemplo) y la de los sistemas puramente aleatorios. Con frecuencia dicho atractor tiene características fractales, convirtiéndose en la huella geométrica que la dinámica caótica ha dejado: los parámetros geométricos (dimensiones fractales) sirven para caracterizar la dinámica.

Caos y fractales en la vida y en las ciencias

La complejidad en la naturaleza es más una norma que una excepción, manifestándose por medio de estructuras de naturaleza fractal. Este tipo de *orden intermedio* surge bien como fruto de dinámicas caóticas, bien como una necesidad de los sistemas para cumplir una misión o ser estables. Así, por ejemplo, la estructura ramificada (fractal) de los bronquios es la respuesta de la naturaleza a la necesidad de intercambiar el oxígeno en la sangre en plazos pequeños de tiempo; o la complicada estructura tridimensional de los vasos sanguíneos en el hígado responde a la necesidad de optimizar el proceso metabólico.

La irrupción de las nuevas teorías del caos y los fractales han conducido a las nuevas teorías sobre la complejidad que tratan de explicar sistemas tan distintos como el cerebro humano, la organización en un hormiguero o la estructura de los ecosistemas. Estas teorías, que no dejan de tener un carácter un tanto especulativo, han arrojado una nueva visión sobre la organización de los sistemas en general. Nos hacen pensar que sistemas aparentemente distintos obedecen a pautas de complejidad muy similares, y que la omnipresencia de esas estructuras intermedias facilitaría el buen funcionamiento y evitaría que llegasen a colapsarse. La cadena de interacciones locales entre los elementos constitutivos del sistema (neuronas, hormigas, elementos vivos de una cadena trófica) que reciben y transmiten información básicamente local a los elementos vecinos, hace emerger una estructura de orden a gran escala. El paralelismo con el juego del caos es grande. Allí el paso de un estado (punto) al siguiente tiene un factor de certeza (se va hacia uno de los tres puntos) y también una "dosis" de incertidumbre. El resultado es la emergencia de la estructura global cuando el número de iteraciones es grande, si bien poco puede ser conocido de la sucesión de puntos (órbita) en una secuencia concreta.

Las estructuras a medio camino entre el orden y el desorden parecen esconder la armonía y la belleza en muchos aspectos de la vida. Piénsese, por ejemplo, en la música como una secuencia de notas. Una melodía consistente en una sucesión predeterminada de notas (DO-RE-MI... DO-SI-LA-SOL...), que se repite una y otra vez, resultaría monótona y aburrida por predecible. Por el contrario, una melodía formada por notas elegidas al azar (obtenida, por ejemplo, lanzando un dado para seleccionar cada nota) sería algo desagradable. La armonía surge de un tipo de orden intermedio que mantiene el factor sorpresa mediante la presencia de cierta aleatoriedad y mitiga la impredecibilidad total con un grado de memoria respecto del pasado (notas anteriores).

La parametrización de términos tan vagos como los anteriores puede hacerse mediante conceptos de la geometría fractal. La melodía, al igual que otros registros espacio-temporales (como el electrocardiograma, el relieve de un perfil montañoso, etcétera) tiene su visualización geométrica por medio de una gráfica (figura 10), que muestra la fluctuación más o menos aleatoria de una variable ("ruido").

Esas gráficas manifiestan lo que se denomina **autosemejanza estadística**. De esta forma, la irregularidad de las mismas, expresada por medio de su dimensión fractal, sirve para eva-

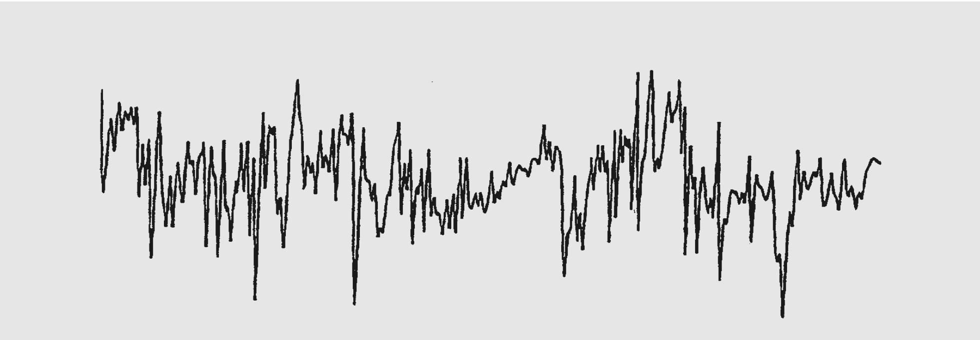

Figura 10.

luar el grado de memoria respecto del pasado. Los llamados **ruidos fractales**, o ruidos coloreados, son ruidos con memoria intermedia entre el *ruido marrón* (también llamado ruido browniano) y la ausencia total de memoria del *ruido blanco*. Los ruidos fractales, en particular el llamado (por razones que no vienen al caso) ruido 1/f, aparecen en innumerables situaciones en la naturaleza, desde la geometría de una costa hasta los ritmos cardiacos, pasando por las secuencias de aminoácidos del ADN (figura 11).

En muchos de esos ejemplos las dimensiones fractales toman valores entre 1 y 2, verificándose esa omnipresencia de las estructuras intermedias que parecen ser una constante en la naturaleza. El viejo aforismo clásico "en el punto medio está la virtud" tendría su lectura estadística en función de las dimensiones fractales: el orden riguroso es aburrido y el desorden absoluto desquiciante. Ahora bien, el "punto medio" no tiene un único camino y el equilibrio de ese orden intermedio puede resolverse de infinitas formas. Así, curiosamente, las diferentes músicas tienen una regularidad estadística bastante bien determinada, con dimensiones fractales en torno a un solo valor, y la frecuencia de los latidos de los corazones sanos muestran una regularidad fractal parecida. En ambos casos la regularidad es próxima a la del ruido 1/f.

Como decíamos al principio del artículo, las características un tanto particulares de las teorías del Caos y de los Fractales han facilitado su difusión en ámbitos y en grados inusuales para los campos de la investigación matemática. Ello ha condicionado, a veces, una presenta-

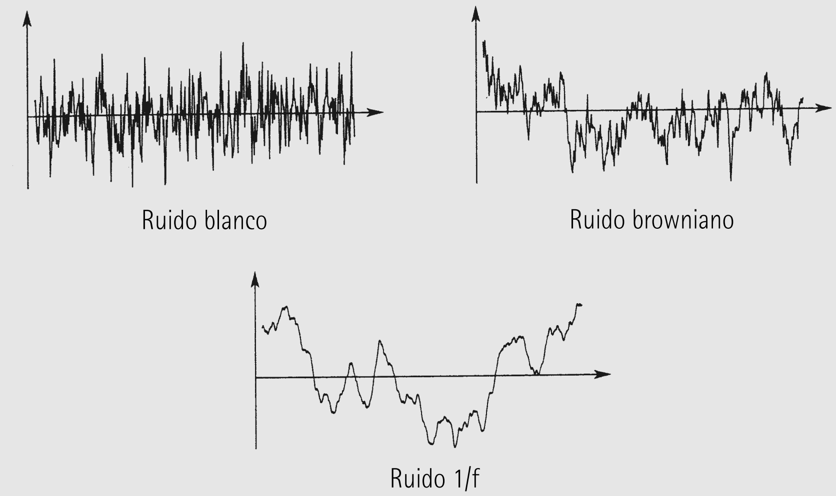

Figura 11.

ción un tanto sensacionalista de estas teorías. Fenómeno, por otra parte, común en el mundo mediático que nos rodea y que hace que la importancia de las cosas se exagere o se trivialice. Con todo, a la vista de lo que hemos expuesto, es fácil percibir que esta parcela de la Matemática posee características espectaculares y de gran calado, desde el punto de vista científico, con importantes consecuencias a la hora de entender, analizar y modelar las estructuras y los fenómenos complejos de la realidad.

Bibliografía recomendada

- De Guzmán M, Martín MA, Morán M y Reyes M. Estructuras Fractales y Aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor. 1993.
- Martín MA, Morán M y Reyes M. Iniciación al caos. Madrid: Editorial Síntesis. 1996.
- Peitgen HO, Jürgens H and Saupe D. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Heidelberg: Springer-Verlag. 1992.